

LIMITE ET CONTINUITE

1) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT

1) Activités et rappels

1.1 Activités :

Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} ; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Handwritten notes and calculations:

- For $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$:

$$\frac{2x^3 + 2x - 4}{2x^3 + 2x^2 - 2x^2 + 2x - 4} = \frac{2x^3 + 2x - 4}{2x^2 + 2x - 4} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{2x^2 + 2x - 4} = 1$$
- For $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$:

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2 + ab + b^2}$$
- For $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$:

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x} = \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$
- For $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$$

LIMITE ET CONTINUITE

deux conditions
à vérifier

1) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT

1) Activités et rappels

1.1 Activités :

Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

regle de l'Hopital $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ (FI) } -$
 $x_0 \in \mathbb{R}$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} ; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{2\sqrt{4x+1} - 3} = \frac{4}{2\sqrt{9} - 3} = \frac{4}{6 - 3} = \frac{4}{3}$

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

LIMITE ET CONTINUITE

1) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT

1) Activités et rappels

1.1 Activités :

Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} ; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Handwritten notes and calculations:

- For the second limit: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$, the denominator is factored as $(x-1)(x-2)$. The numerator is rationalized: $\frac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{4x-8}{\sqrt{4x+1}+3}$. Then $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-8}{\sqrt{4x+1}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- For the fifth limit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$, the denominator is $\sin^2 x$. The numerator is factored: $2\cos^2 x + \cos x - 3 = (2\cos x + 3)(\cos x - 1)$. Then $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\cos x + 3)(\cos x - 1)}{\sin^2 x} = \frac{5 \cdot (-1)}{0} = \infty$.
- For the sixth limit: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$, the denominator is $2x^3 + 2x - 4 = 2(x^3 + x - 2)$. The numerator is $x(3x - 1)$. Then $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(3x-1)}{2(x^3+x-2)} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 0} = \infty$.

LIMITE ET CONTINUITE

1) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT

1) Activités et rappels

1.1 Activités :

Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} ; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Handwritten notes and calculations:

$$\frac{ax}{bx} \times \frac{\sin(ax)}{ax} \times \frac{bx}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$\frac{ax}{bx} \times \frac{\sin(ax)}{ax} \times \frac{bx}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{7}{3}$$

$$\frac{x}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\frac{\sin y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$$

LIMITE ET CONTINUITE

1) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT

1) Activités et rappels

1.1 Activités :

Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} ; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Compos. $\rightarrow (g \circ f)' = f'(x) g'(f(x))$ $(\sin f(x))' = f'(x) \cos(f(x))$

CQFD

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(2x)}{\sin x} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - 2y)}{\cos(\frac{\pi}{2} - y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{\sin y} = \frac{2}{1} = 2$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

(DL)

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$y_1 = 2$
 $y_1 y_2 = \frac{c}{a}$
 $y_1 + y_2 = \frac{-b}{a}$
 $y_2 = -\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} ; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

$x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 2$
 $\cos x = y$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) Comparer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $f(1)$

On dit que f est continue en $x_0 = 1$

Activité 3 :

Considérons la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) ; \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

(E désigne la partie entière)

1- Déterminer D_f

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2 \cos x (-\sin x)) - \sin(x)}{-2 \cos x (-\sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos x + 1}{-2 \cos x} = \frac{5}{-2}$$

$$\frac{2y^2 + y - 3}{1 - y^2} = \frac{(2y+3)(y-1)}{(1-y)(1+y)} = \frac{-(2y+3)}{1+y}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x - 2}{1 - \cos^2 x} + \frac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x}$$

$$= -2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \cos x} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} ; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

factorisation
convergence

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 1}{2x \sqrt{x^2 + 3}}$$

$$= \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14$$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) Comparer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $f(1)$ *= 0*

lit que f est continue en $x_0 = 1$



Activité 3 :

Considérons la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) ; \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

(E désigne la partie entière)

b) Comparer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $f(1)$

On dit que f est continue en $x_0 = 1$

Activité 3 :

Considérons la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) ; \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad (E \text{ désigne la partie entière})$$

- 1- Déterminer $D_f = \mathbb{R}$
- 2- Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$
- 3- g est elle continue en $x_0 = 0$?

1.2 Rappel

Definition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers le réel l quand x tend vers a si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

2 Définition et exemples

Définition :

$a \leq b \leq c$
 $d < 0$
 $cd \leq bd \leq da$

BE SMART

$\forall z \in \mathbb{R} : x-1 < E(x) \leq x$
 $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$
 $1-x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$
 $\forall x > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} 1-x = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
Théorème de Goursat

3- g est elle continue en $x_0 = 0$?

1.2 Rappel

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers le réel l quand x tend vers a si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

2 Définition et exemples

Définition :

Soit f une fonction définie **sur un intervalle de centre a** . On dit que la fonction f est **continue** en a si :

elle admet une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

si: $x=a=2$

$$f(x) = 3x - 1$$

$f(2) = 5, 9$



3- g est elle continue en $x_0 = 0$?

1.2 Rappel

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers le réel l quand x tend vers a si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

2 Définition et exemples

Définition :

Soit f une fonction définie **sur un intervalle de centre a** . On dit que la fonction f est **continue** en a si :

elle admet une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

1

$[2, 3]$

$] \alpha, \beta [$

$\frac{\alpha + \beta}{2} = a$

2Bac S.M

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

Exemples :

❶ Montrer en utilisant

el quelconque).

Soit $\varepsilon > 0$, on prend $\alpha = \frac{\varepsilon}{3} > 0$, soit $x \in D_f$ tel que

$$0 < |x - a| < \alpha = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(x) - f(a)| = |3x - 1 - (3a - 1)| = |3x - 3a|$$

$$= 3|x - a|$$

$$< 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 3a - 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} = D_f,$$

$$|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$|3x - 1 - (3a - 1)| < \varepsilon$$

$$|3||x - a| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

2Bac S.M

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

Exemples :

❶ Montrer en utilisant la définition de la limite (ou de la continuité) que la fonction f est continue en a (ou que la limite de $f(x)$ est l quand x tend vers a).

Soit $\varepsilon > 0$, on prend $\alpha = \frac{\varepsilon}{3} > 0$, soit $x \in D_f$ tel que

$$0 < |x - a| < \alpha = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(x) - f(a)| = |3x - 1 - (3a - 1)| = |3x - 3a| = 3|x - a|$$

donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ continue en a car $3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

el quelconque).

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 3a - 1$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} = D_f$,

$$|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$|3x - 1 - (3a - 1)| < \varepsilon$$

$$|3||x - a| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

LIMITE ET CONTINUITE

FORMAT

Minion Pro

14,04

T *T* T T' T₁

1) CONTINUITÉ D'UNE F

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{R}, |x-1| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$

$\eta = \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall \varepsilon, \exists \eta, \eta = \frac{\varepsilon}{3}$

$|x-1| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x-1 < \varepsilon \Rightarrow 0 < x+1 < 3$

$A \Rightarrow B$

$|f(x) - f(1)| < \varepsilon$

$|x^2 - 1| < \varepsilon$

$|x-1||x+1| < \varepsilon$

$|x-1| < \frac{\varepsilon}{|x+1|}$

$\left[\frac{\varepsilon}{3}, \varepsilon \right]$