

Talking:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} ; \text{si } x > 2 \\ f(x) = \frac{x - 2}{2x^2 + x - 10} ; \text{si } x < 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

En utilisant la notion des limites étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 2$

3- Interprétations graphiques

3.1 Activité :

Activité 1:

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 1 \\ x^2 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

- 1- Déterminer $f(1)$ et étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 1$
- 2- Représenter graphiquement la fonction f .

Activité 2 :

Considérons la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < -1 \\ -3x + 3, & x > -1 \end{cases}$ et $h(-1) = 3$

- 1- a) la fonction h admet-elle une limite en $x_0 = -1$
- b) la fonction h est-elle continue en $x_0 = -1$
- 2- Représenter graphiquement la fonction h .

3.2 Interprétations

La courbe	L'interprétation

π ACADEMY
Be SMART

1- Déterminer $f(1)$ et étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 1$

2- Représenter graphiquement la fonction f .

Activité 2 :

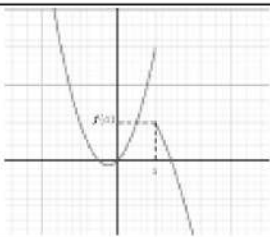
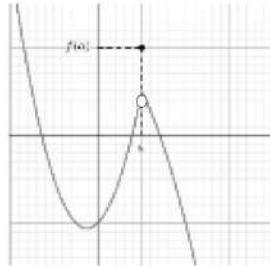
Considérons la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < -1 \\ -3x + 3, & x > -1 \end{cases}$ et $h(-1) = 3$

1- a) la fonction h admet-elle une limite en $x_0 = -1$

b) la fonction h est-elle continue en $x_0 = -1$

2- Représenter graphiquement la fonction h .

3.2 Interprétations

La courbe	L'interprétation
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$ <i>Handwritten red text:</i> $h_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 = f(1)$	f est définie en 1 f n'admet pas de limite en 1 f n'est pas continue en 1
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}; f(1) = 2$	f est définie en 1 f admet une limite en 1 et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ f n'est pas continue en 1
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	f est définie en 1 f admet une limite en 1 et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Activité 2 :

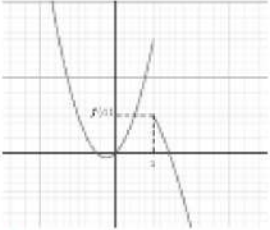
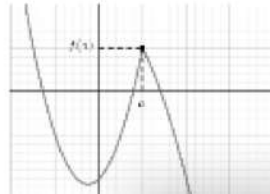
Considérons la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < -1 \\ -3x + 3, & x > -1 \end{cases}$ et $h(-1) = 3$

1- a) la fonction h admet-elle une limite en $x_0 = -1$

b) la fonction h est-elle continue en $x_0 = -1$

2- Représenter graphiquement la fonction h .

3.2 Interprétations

La courbe	L'interprétation
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	f est définie en 1 f n'admet pas de limite en 1 f n'est pas continue en 1
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}; f(1) = 2$	f est définie en 1 f admet une limite en 1 et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ f n'est pas continue en 1
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	f est définie en 1 f admet une limite en 1 et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ <u>f est continue en $a : 1$</u>

2Bac S.M

Exercice :

Etudier la continuité de la fonction

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{3}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

1) Discontinuité des :
Car : $x \leq 0$
 $x > 0$

4) Prolongement par continuité**Activité :**

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

- 1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
- 2- Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$, h est-elle continue en $x_0 = -1$?
- 3- Soit la fonction $\bar{h}$ définie par : $\begin{cases} \bar{h}(x) = h(x) & \text{si } x \neq -1 \\ \bar{h}(-1) = 3 \end{cases}$
 - a) Déterminer $D_{\bar{h}}$
 - b) Etudier la continuité de la fonction $\bar{h}$ en $x_0 = -1$

La fonction $\bar{h}$ s'appelle un **prolongement par continuité de la fonction h en -1**

- 4- Peut-on prolonger h par continuité en $a = -2$

Théorème et définition :

2) ACADEMY
 π Be SMART

$$0 \leq |x| \left| \sin\left(\frac{3}{x}\right) \right| \leq |x|$$

$$0 \leq |f(x)| \leq |x| \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} = 1$$

PNG

PDF (Default)

$$f(x) = x \sin\left(\frac{3}{x}\right), \quad x \neq 0$$

$$f(0) = 0,$$

4) Prolongement par continuité

Activité :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
- Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$, h est-elle continue en $x_0 = -1$?
- Soit la fonction $\bar{h}$ définie par :
$$\begin{cases} \bar{h}(x) = h(x) & \text{si } x \neq -1 \\ \bar{h}(-1) = 3 \end{cases}$$
 - Déterminer $D_{\bar{h}}$
 - Etudier la continuité de la fonction $\bar{h}$ en $x_0 = -1$

La fonction $\bar{h}$ s'appelle **un prolongement par continuité de la fonction h en -1**

- Peut-on prolonger h par continuité en $a = -2$

Théorème et définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (finie)

$$\bar{f}(x) = f(x); \quad \text{si } x \neq a$$



f définie sur $\mathbb{R}^*$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{R}$

$\left\{ \begin{matrix} f(x) \\ f(2) \end{matrix} \right\}$ si $x \neq 0$
 $l - f(0)$ si $x = 0$

a) Déterminer $D_{\bar{h}}$

b) Etudier la continuité de la fonction $\bar{h}$ en $x_0 = -1$

La fonction $\bar{h}$ s'appelle **un prolongement par continuité de la fonction h en -1**

4- Peut-on prolonger h par continuité en $a = -2$

Théorème et définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (finie)

La fonction $\bar{f}$ définie par :
$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x); & \text{si } x \neq a \\ \bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l & \end{cases}$$
 est une fonction **continue en a** et c'est un **prolongement de la fonction f en a** .

La fonction $\bar{f}$ s'appelle **un prolongement par continuité** de la fonction f en a

Exercice 1 :

Définir un prolongement par continuité de la fonction $g(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \tilde{g}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{4}{3} & \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+4)} = \frac{(2^2-1)(2^2+1)}{(2-1)(2^2+2+4)} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

de la fonction f en a .

La fonction $\bar{f}$ s'appelle **un prolongement par continuité** de la fonction f en a

Exercice 1 :

Définir un prolongement par continuité de la fonction $g(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

II) CONTINUITE A DROITE CONTINUITE A GAUCHE.

1) Activité et définition.

1.1 Activité.

Introduction

Dans l'exercice précédent où f était définie par :

$$A \Leftrightarrow B \\ \neg A \Leftrightarrow \neg B$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \\ (\mathbb{Z}) \Rightarrow E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq E(x) \right\}$$

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z} \right\} \\ = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

de la fonction f en a .

La fonction $\bar{f}$ s'appelle **un prolongement par continuité** de la fonction f en a

Exercice 1 :

Définir un prolongement par continuité de la fonction $g(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

II) CONTINUE A DROITE CONTINUE A GAUCHE.

1) Activité et définition.

1.1 Activité.

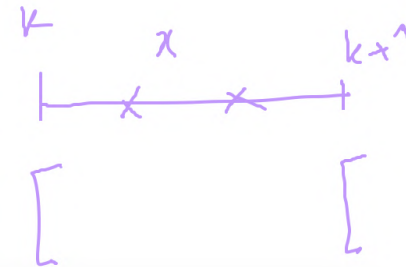
Introduction

Dans l'exercice précédent où f était définie par :

$$\forall x \in [k, k+1[$$

$$E(x) = k$$

$$(E(x))' = (k)' = 0$$



de la fonction f en a .

La fonction $\tilde{f}$ s'appelle **un prolongement par continuité** de la fonction f en a

Exercice 1 :

Définir un prolongement par continuité de la fonction $g(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

II) CONTINUITE A DROITE CONTINUITE A GAUCHE.

1) Activité et définition.

1.1 Activité.

Introduction

Dans l'exercice précédent où f était définie par :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 2$$

$$E(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1(x-2)(x+3)}{x-1}$$

$$1 \leq x < 2$$

$$\begin{array}{r} 0 - x \ 6 \\ \hline 1 \end{array} = 0 - 6 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = 5$$

2Bac S.M

Limite et continuité

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} ; \text{si } x > 2 \\ f(x) = \frac{x - 2}{2x^2 + x - 10} ; \text{si } x < 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

On a trouvé que : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{9} = f(2)$; on dit que **la fonction f est continue à gauche** de 2
 et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \frac{1}{9} = f(2)$ on dit que **la fonction f n'est pas continue à droite** de 2.

1.2 Définitions

Définition

❶ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ (où $r > 0$)

On dit que la fonction f est **continue à droite de a** si : f admet une limite finie à droite de a et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

❷ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$ (où $r > 0$)

On dit que la fonction f est **continue à gauche de a** si : f admet une limite finie à gauche de a et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

Théorème

Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

❶ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ (où $r > 0$)

On dit que la fonction f est **continue à droite de a** si : f admet une limite finie à droite de a et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

❷ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$ (où $r > 0$)

On dit que la fonction f est **continue à gauche de a** si : f admet une limite finie à gauche de a et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Théorème

Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Preuve : (En exercice)

Exercice 1:

Etudier la continuité de la fonction $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{4x - 3} - 1 & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} & \text{en } a = 1 \end{cases}$

$$\frac{3x^2 - x - 2}{4x - 4}$$

$$\frac{6x - 2}{4}$$

$$\frac{5}{4}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{2x + 12} - 4} \quad \text{si } x > 2$$

$$g(x) = \frac{x^2 + ax - a + 1}{\sqrt{2x + 12} - 4} \quad \text{si } x < 2$$

Preuve : (En exercice)

Exercice 1:

Etudier la continuité de la fonction
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{|4x - 3| - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \text{en } a = 1$$

Exercice 2 :

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{2x + 12} - 4} & \text{si } x > 2 \\ \frac{x^2 + \alpha x - \alpha + 1}{x - 2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$g(2) = l$

Existent-t-il α et l pour que g soit continue en 2 ?

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

1) Continuité sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f , soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans D_f

- On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$
- On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
- On dit que f est continue sur $]a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

π ACADEMY
Be SMART

$2x \rightarrow 1$
 $\frac{2}{2\sqrt{2x+12}}$
 $x \rightarrow 2^+$
 $\frac{5}{5} = 1$
 $5 + 2x - x = 5 + x$
 $\frac{5+x}{0}$
 $\frac{5}{5} = 1$
 $x \rightarrow 2^-$
 $\frac{5}{5} = 1$
 $\frac{5+x}{0}$
 $\frac{5}{5} = 1$

pour que g soit continue en 2
il faut que $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \in \mathbb{R}$

Cela signifie
 $\alpha = -5$ car $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{5 + \alpha}{0} = \frac{0}{0}$

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+12}-4} & \text{si } x > 2 \\ \frac{x^2+\alpha x-\alpha+1}{x-2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$g(2) = l$

Existent-t-il α et l pour que g soit continue en 2 ?

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f , soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans D_f

- On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$ $\Rightarrow I$
- On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
- On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

$\forall x_0 \in]a, b[$ f continue en x_0

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]a, b[$ $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall x_0 \in]a, b[$

4

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

2Bac S.M

Limite et continuité

Remarque :

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$I \cap J = \emptyset$

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

2Bac S.M

Limite et continuité

Remarque :

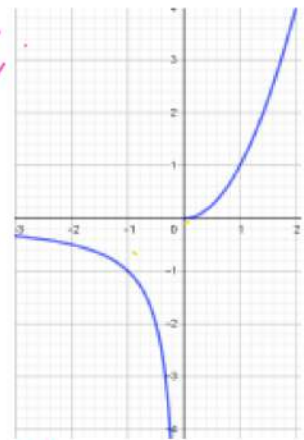
- ✓ Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ elle est continue sur $[a, c]$
 - ✓ En général si f est continue sur un intervalle I et sur un intervalle J et si $I \cap J \neq \emptyset$ alors f est continue sur $I \cup J$.
 - ✓ f peut-être continue sur $[a, b[$ et sur $]b, c]$ sans qu'elle soit continue sur $[a, c]$
- Dans le graphique ci-dessous f est continue sur $]-3, 0[$ et continue sur $]0, 2]$ mais pas continue sur $]-3, 0]$ car elle n'est pas continue en 0

$\{I \cap J\}$

$\emptyset$

$I \cap J = \emptyset$

$I =]-\infty, 0[$
 $J =]0, +\infty[$
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



$I =]a, b[$
 $J =]a, b[$
 $\Rightarrow I \cap J =]a, b[$

2) Opérations sur les fonctions continues

2.1 Rappels sur les opérations sur les limites finies

2) Opérations sur les fonctions continues

2.1 Rappels sur les opérations sur les limites finies

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ on a :

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l'$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l'$
- $\lim_{x \rightarrow a} (|f|)(x) = |l|$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'} \quad l' \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'} \quad l' \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{f})(x) = \sqrt{l} \quad l \geq 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a .

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Grace à la propriété précédente et à la définition de la continuité on peut en déduire :

Propriété :

① Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :

- $f + g$
- $f \times g$
- $|f|$

$$\lim_{n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}} |g(x)| = l \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow x_0} g(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -l$$

2Bac S.M

Limite et continuité

Remarque :

La propriété précédente reste vraie soit à droite de a , à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Résultat :

Une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ est définie comme la somme des plusieurs monômes

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$\sum_{k=0}^n a_k x^k$ - c'est pas nécessairement un polynôme

Et puisque la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto kx^n$ et par suite

1) **Propriété :**

Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continue sur $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \cos(2)$$

Exemples :

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2 + x + 3$ étant une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$ (Son discriminant Δ est négatif)

Propriété :

Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continue sur $\mathbb{R}$

Exemples :

① $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2 + x + 3$ étant une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$ (Son discriminant Δ est négatif)

② $g(x) = \frac{4x^3 + x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ est continue sur $] -\infty, -3[$; sur $] -3, 1[$ et sur $] 1, +\infty[$.

③ La fonction $\tan$ est continue sur tous les intervalles de la forme : $]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

2.3 Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$ et x_0 un élément de I .

① Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

② Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue I .

Preuve : (En utilisant la définition)

Montrons que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon)$

On a g est continue en $f(x_0)$ donc :

nombre
↓
impair π
2
a = nombre
impair
2

Propriété :

Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continue sur $\mathbb{R}$

Exemples :

① $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2 + x + 3$ étant une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$ (Son discriminant Δ est négatif)

② $g(x) = \frac{4x^3 + x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ est continue sur $] -\infty, -3[$; sur $] -3, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

③ La fonction $\tan$ est continue sur tous le intervalles de la forme : $]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

2.3 Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$ et x_0 un élément de I .

① Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

② Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue I .

Preuve : (En utilisant la définition)

Montrons que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon)$

On a g est continue en $f(x_0)$ donc :

$(\Rightarrow)$
 $\forall x \in I, f(x) \in J$

- $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc
- $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R} \right)$
- $\sin$ est continue sur $\mathbb{R}$

2Bac S.M

$g(x) = \sqrt{\sin^2 x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (justifier la réponse)

Exercice : Montrer que $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$

3) Limite de vou

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$; si v est continue en l alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

Preuve :

On a : $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$ donc u admet un prolongement par continuité $\tilde{u}$ définie comme :

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = u(x) ; \text{ si } x \neq x_0 \\ \bar{u}(x_0) = l \end{cases}$$

g continue sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = \sqrt{\sin^2 x + 1}$$