

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$ et déterminer $g^{-1}(x)$ pour x dans J

11

2Bac S.M

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

Exercice 3 :

Soit la fonction $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que h est une bijection de $] -1, 1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer $h^{-1}(x)$ pour x dans J .

2.3 Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 :

Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I .

Preuve :

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{y}{1-y^2} = x$$

$$y = h^{-1}(x)$$

$$h(I) = J$$

Soit la fonction $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que h est une bijection de $] -1, 1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer $h^{-1}(x)$ pour x dans J .

2.3 Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 :

Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} a la même monotonie sur J que celle de f sur I .

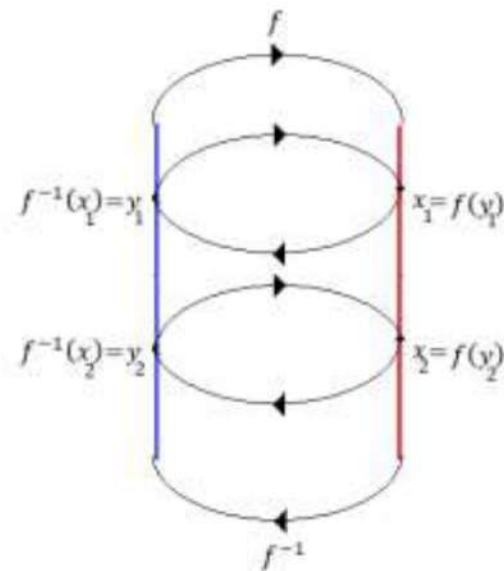
Preuve :

$$\begin{aligned} T_{f^{-1}/J} &= \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)} \\ &= \frac{1}{T_{f/I}} \quad (T_{f/I} \neq 0 \text{ } f \text{ est strictement monotone}) \end{aligned}$$

Donc le taux de f^{-1} sur J a le même signe que le taux de f sur I

Et on conclut.

Propriété 2 :



Et on conclut.

Propriété 2 :

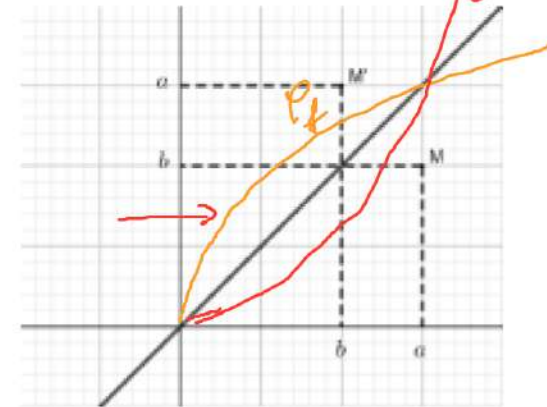
Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $C_{f^{-1}}$ et C_f sont symétriques par rapport à :

$$(\Delta) y = x$$

Rappels :

$$① M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

② Dans un repère orthogonal si on a un point $M(a, b)$ son symétrique par rapport à la droite $(\Delta) y = x$ est le point $M'(b, a)$.

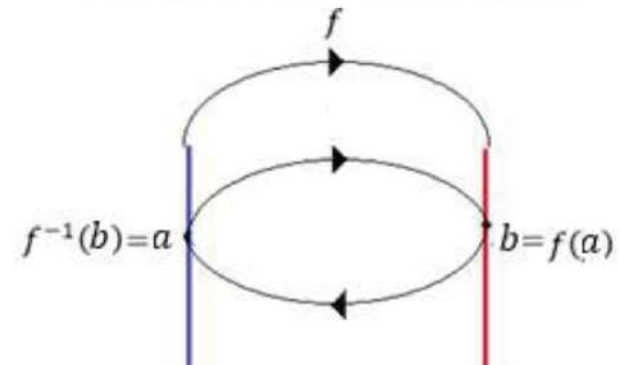


Preuve d'une propriété :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I , f^{-1} sa fonction réciproque définie de $J = f(I)$ vers I .

C_f et $C_{f^{-1}}$ sont les courbes respectives de f et de f^{-1} .

Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe C_f son symétrique par rapport à la droite $(\Delta) y = x$ est le point $M'(f(a), a)$.



Rappels :

$$\textcircled{1} M(a, b) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} a \in D_f \\ b = f(a) \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ Dans un repère orthogonal si on a un point $M(a, b)$ son symétrique par rapport à la droite $(\Delta) y = x$ est le point $M'(b, a)$.

$$M(a, f(a)) \in C_f$$

Preuve d'une propriété :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I , f^{-1} sa fonction réciproque définie de $J = f(I)$ vers I .

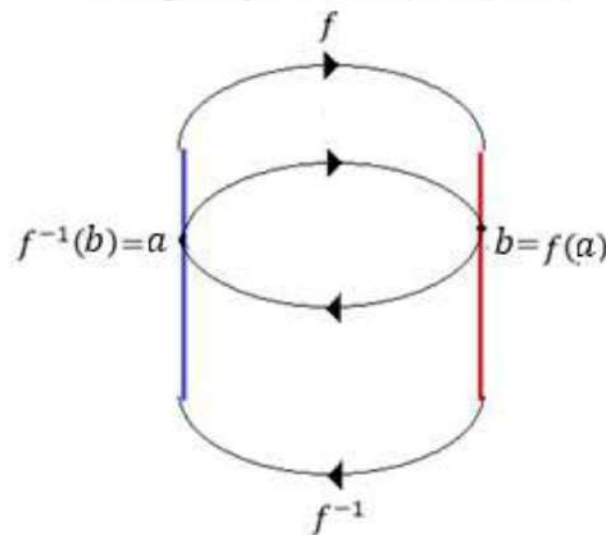
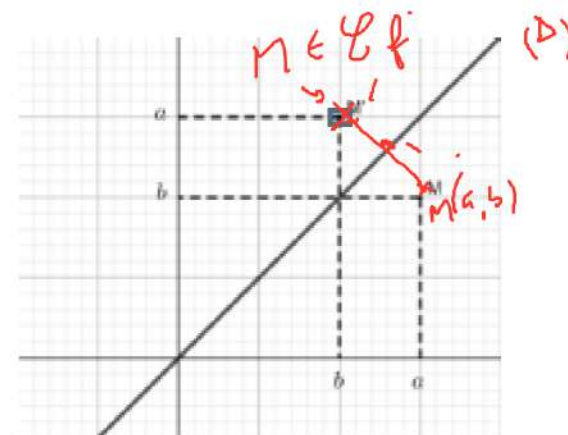
C_f et $C_{f^{-1}}$ sont les courbes respectives de f et de f^{-1} .

Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe C_f , son symétrique par rapport à la droite $(\Delta) y = x$ est le point $M'(f(a), a)$.

$$\text{Or : } \begin{cases} f(a) = b \\ a = f^{-1}(b) \end{cases} \text{ donc } M'(b, f^{-1}(b)) \text{ d'où } M' \in C_{f^{-1}}$$

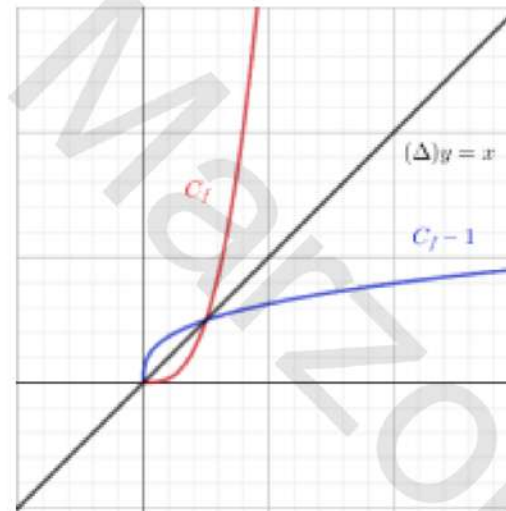
Propriété :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I ,



- La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement croissante.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y)$
 - $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n)$
 - $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n)$
 - $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ((\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x)$
 - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N}) ((\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p})$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
 - Si $\lim_{x \rightarrow **} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow **} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
 - Si $\lim_{x \rightarrow **} u(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow **} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

La courbe de la fonction $\sqrt[n]{x}$



Règle de calcul :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x} \right)$ (à prouver)
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) (\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p})$ (à prouver)

Remarque :

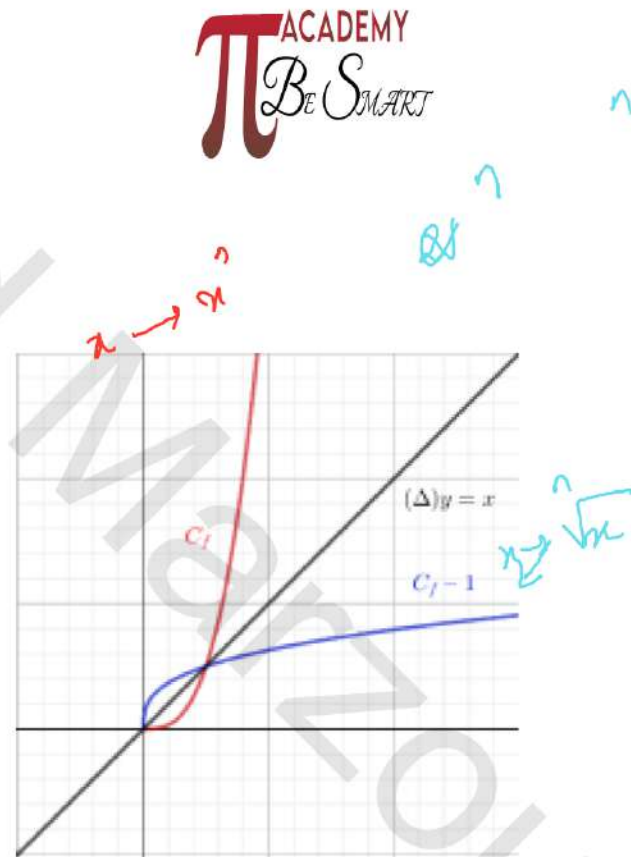
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \geq 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x)$
- La fonction $\sqrt[n]{}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ strictement croissante.
 - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y)$
 - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n)$
 - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)((\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N})(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow **} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow **} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow **} u(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow **} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

La courbe de la fonction $\sqrt[n]{}$

Règle de calcul :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{**})\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}\right)$

(à prouver)



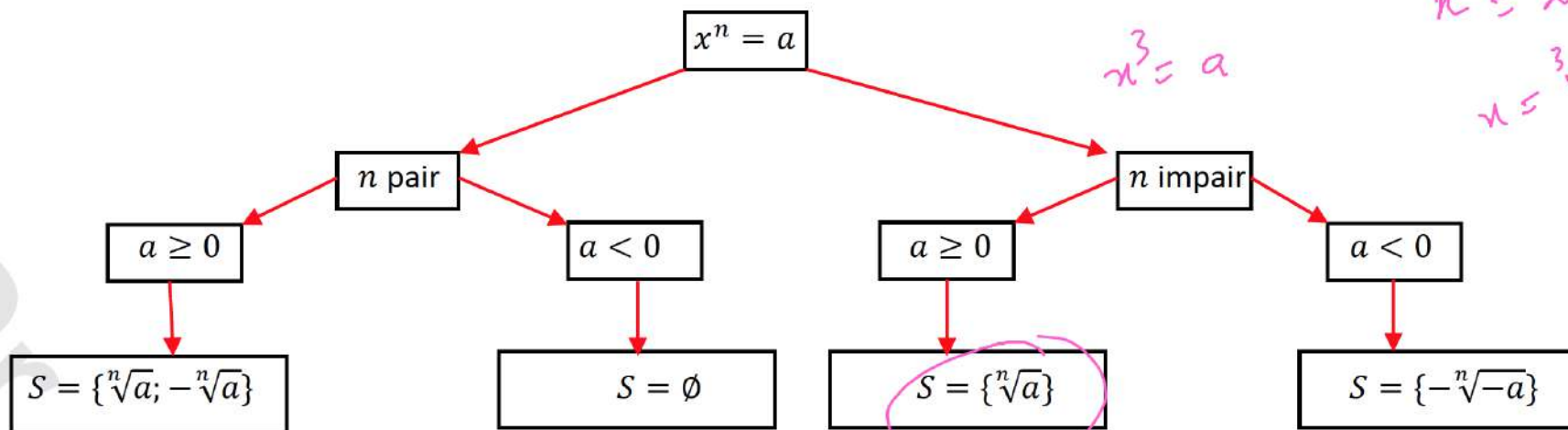
2Bac S.M

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = x)$

L'équation $x^n = a$



Exercices d'applications :

Exercice 1 :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 = 16$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x - 1)^3 = -27$

Exercices d'applications :

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 = 16$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x - 1)^3 = -27$

Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - x = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$.

3.2 L'expression conjuguée et ses applications

Exercice 3 :

Sait que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ et $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Il en résulte : $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ et $a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$

Par suite :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \right)$$

π ACADEMY
Be SMART

$$\frac{y^2 - 5y + 6}{y^2}$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$
$$\frac{y^2 - 5y + 6}{y^2}$$

$a+b < 0$
 $a > 0$
 $b < 0$
 $b+a < 0$

$0 < a < b \Rightarrow (a+b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-1-k} \right)$
 $= (a+b) (a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \dots + ab^{n-1} - b^n) < 0$

2Bac S.M

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

D'ordre 4 :

On sait que : $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Il en résulte que : $a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$

par suite :

n : impair

$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$
 $a^n - b^n = (a-b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right)$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}} \right)$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser : $a^4 + b^4$

Applications :

Déterminer les limites suivantes :

n impair

$a^n + b^n = (a+b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-1-k} \right)$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{2x+1}-1}{\sqrt[3]{2x+8}-2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^2 + 3x} - 2\sqrt{x^2 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{x^q + 1} - \sqrt[q]{x^p + 1} \text{ (discuter suivant les valeurs de } p \text{ et } q)$$

5) la fonction Arctangente :

Activité :

1- Déterminer $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$ = 4d

2- Montrer que la restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

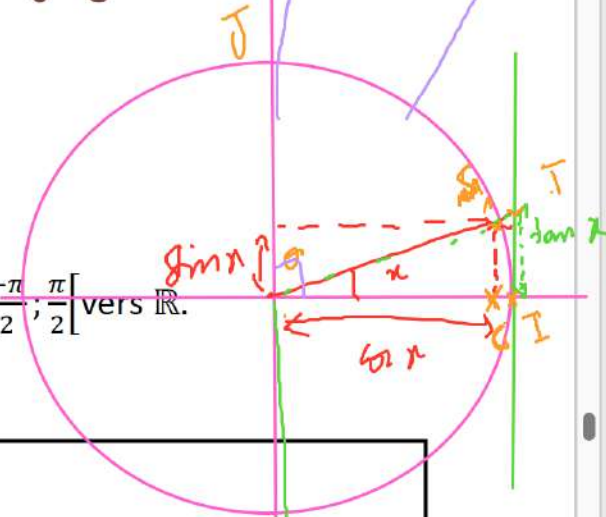
propriété et définition :

La restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction **Arctangente**, notée : **artan** elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

La courbe de la fonction arctan :

π ACADEMY
Be SMART



Handwritten notes in orange and blue:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^2 + 3x} - 2\sqrt{x^2 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{x^q + 1} - \sqrt[q]{x^p + 1} \text{ (discuter suivant les valeurs de } p \text{ et } q)$$

5) la fonction Arctangente :

Activité :

1- Déterminer $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$

2- Montrer que la restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

propriété et définition :

La restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction **Arctangente**, notée : **artan** elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

La courbe de la fonction arctan :

π ACADEMY
Be SMART

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^2 + 3x} - 2\sqrt{x^2 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{x^q + 1} - \sqrt[q]{x^p + 1} \text{ (discuter suivant les valeurs de } p \text{ et } q)$$

5) la fonction Arctangente :

Activité :

1- Déterminer $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$

2- Montrer que la restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

propriété et définition :

La restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction **Arctangente**, notée : **artan** elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

La courbe de la fonction arctan :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

π ACADEMY
Be SMART

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\tan y - \tan(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\tan(y-x)}{y-x}$$

$$\tan(y-x) \approx (1 + \tan(x)\tan(y)) \times (y-x)$$

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\tan(y-x)}{y-x} = 1 \times (1 + \tan(x)\tan(y)) = 1 + \tan(x)\tan(y)$$

$$= 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^2 + 3x} - 2\sqrt{x^2 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{x^q + 1} - \sqrt[q]{x^p + 1} \text{ (discuter suivant les valeurs de } p \text{ et } q)$$



5) la fonction Arctangente :

Activité :

1- Déterminer $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$

2- Montrer que la restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

propriété et définition :

La restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction **Arctangente**, notée : **artan** elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

La courbe de la fonction arctan :



Handwritten notes in red:

$f:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

$f(I) = f(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[)$

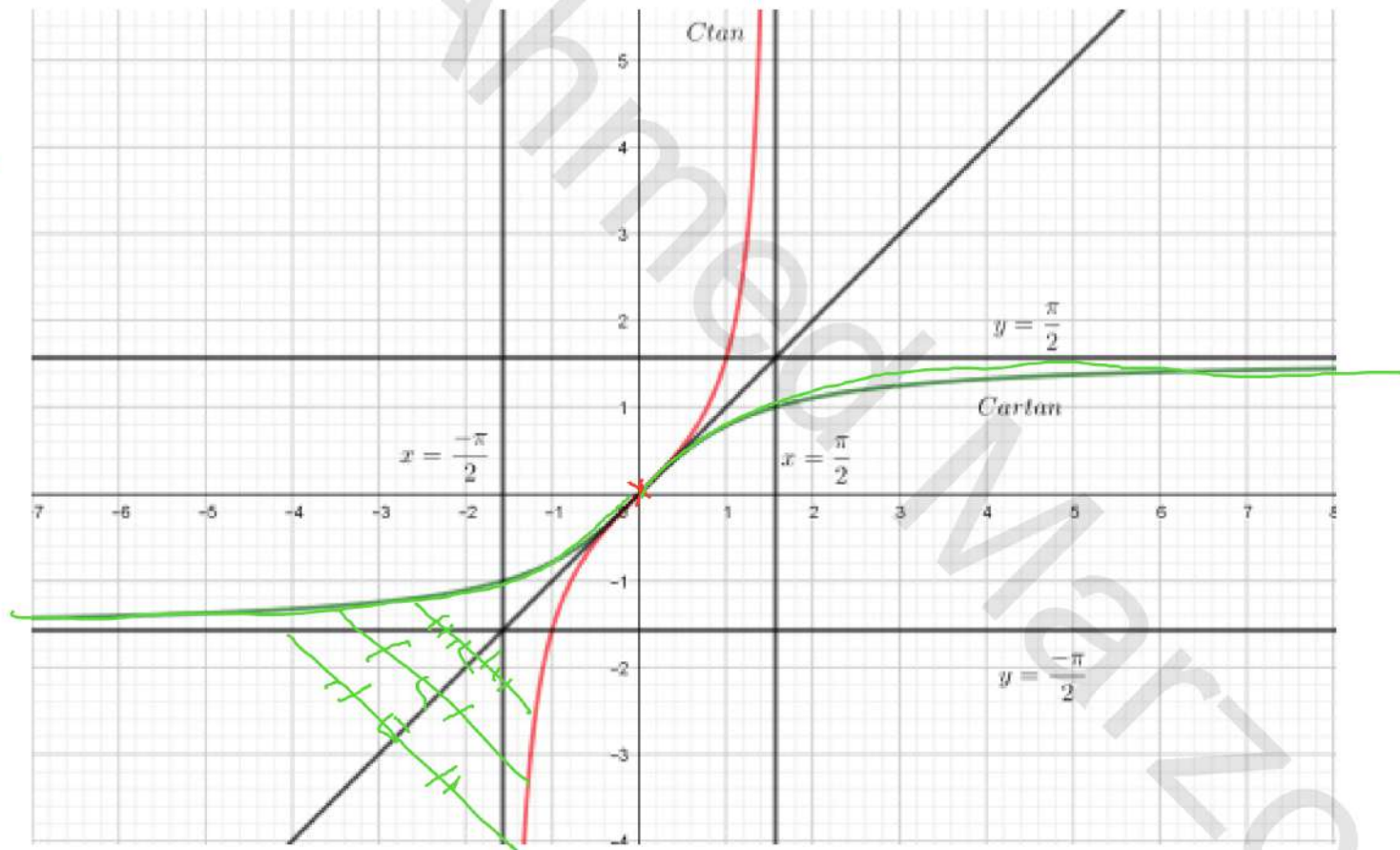
$\in]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

$x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-$

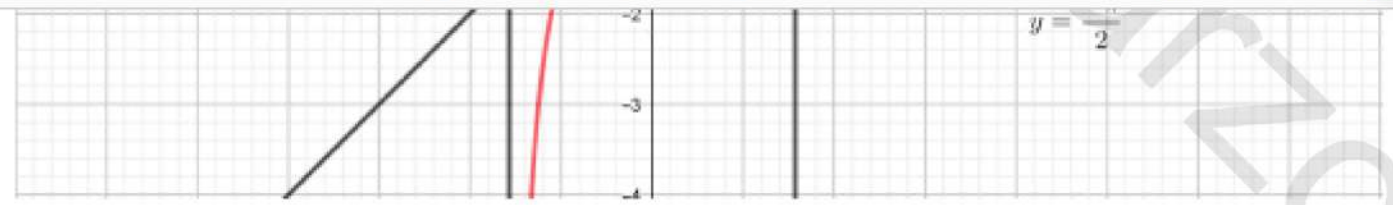
$\tan x$

La courbe de la fonction $\arctan$:

$f(x) = \tan x$



PNG
PDF (Default)



Résultats :

$$\textcircled{1} \begin{cases} \arctan x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\tan(\arctan x) = x) \text{ et } (\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[) (\arctan(\tan x) = x)$$

$\textcircled{4}$ La fonction $\arctan$ est impaire strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

Handwritten notes in green and pink:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\arctan x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

π ACADEMY
Be SMART

Handwritten notes in pink and blue:

- $a, b \in \mathbb{R}$ (pink)
- f existe (blue)
- $f(a) = b$ (pink)
- $f^{-1}(b) = a$ (blue)
- $f^{-1}(x) = a$ (pink)
- $x \rightarrow b$ (blue)

$$\textcircled{5} (\forall x \in \mathbb{R}^+) \left(\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} \right) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}^-) \left(\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2} \right) \text{ (Propriété à démontrer)}$$

Resultats :

$$① \begin{cases} \arctan x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$③ (\forall x \in \mathbb{R})(\tan(\arctan x) = x) \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\right) (\arctan(\tan x) = x)$$

$$④ \text{ La fonction } \arctan \text{ est impaire strictement croissante sur } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

π ACADEMY
Be SMART
 $b = f(a)$
 $a = f^{-1}(b)$
 $a = f^{-1}(b)$

f fonction impaire (f^{-1} existe) $\Rightarrow f^{-1}$ est impaire
 f fonction paire (Domaine de définition) $\Rightarrow f^{-1}$ n'existe pas (f^{-1} n'est strictement croissante)

2Bac S.M

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

$$⑤ (\forall x \in \mathbb{R}^+) \left(\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^-) \left(\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{Propriété à démontrer})$$

non true

Exercice 1 :

Déterminer les réels suivants:

$$a = \text{Arctan} \left(\tan \left(-\frac{3\pi}{22} \right) \right); \quad b = \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{144\pi}{4} \right) \right); \quad c = \tan(\text{Arctan} \sqrt{123})$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1, \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(1)$$

2Bac S.M

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

⑤ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\left(\text{arctan } x + \text{arctan} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$ $\left(\text{arctan } x + \text{arctan} \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}\right)$ (Propriété à démontrer)

Exercice 1 :

$$f(x) = \text{Arctan } x + \text{Arc tan } \frac{1}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

Déterminer les réels suivants:

$$a = \text{Arctan} \left(\tan \left(-\frac{3\pi}{22} \right) \right); \quad b = \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{144\pi}{4} \right) \right); \quad c = \tan(\text{Arctan} \sqrt{123})$$

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels tels que $a \in]-1, 1[$ et $b \in]-1, 1[$

- 1- Montrer que: $\text{arctan } a + \text{arctan } b = \text{arctan} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right)$
- 2- Etudier le cas où $a > 1$ et $b > 1$
- 3- Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\text{arctan} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{2} \right) + \text{arctan} \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{Arctan } x - 1}{4x - \pi}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2\text{arctan } x - \pi)$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}(2x^2 + x)}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$(\text{Arctan}(h(x)))' = \frac{h'(x)}{1+h(x)^2}$$

$$f(x) = \text{cte} = f(1) = \frac{\pi}{2}$$

2Bac S.M

Limite et continuité

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

⑤ $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \left(\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} \right)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-) \left(\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2} \right)$ (Propriété à démontrer)

Exercice 1 :

Déterminer les réels suivants:

$$a = \text{Arctan} \left(\tan \left(-\frac{3\pi}{22} \right) \right); \quad b = \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{144\pi}{4} \right) \right); \quad c = \tan(\text{Arctan} \sqrt{123})$$

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels tels que $a \in]-1,1[$ et $b \in]-1,1[$

- 1- Montrer que: $\arctan a + \arctan b = \arctan \left(\frac{a+b}{1-ab} \right)$
- 2- Etudier le cas où $a > 1$ et $b > 1$
- 3- Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\arctan \left(\frac{1-\sqrt{x}}{2} \right) + \arctan \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{Arctan} x - 1}{4x - \pi}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2\arctan x - \pi)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctan}(2x^2+x)}{\sqrt[3]{x^2+1}-1} \right)$

99,99 /

I is an interval $\Leftrightarrow \forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow \forall c \in [a, b], c \in I$

