

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$; si v est continue en l alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

Preuve :

On a : $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$ donc u admet un prolongement par continuité $\bar{u}$ définie comme :

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = u(x) ; \text{ si } x \neq x_0 \\ \bar{u}(x_0) = l \end{cases}$$

La fonction $\bar{u}$ étant continue en x_0 ; et v est continue en $l = \bar{u}(x_0)$ alors et d'après le théorème de la composition $(v \circ \bar{u})$ est continue en x_0 et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ \bar{u})(x) = (v \circ \bar{u})(x_0) = v(\bar{u}(x_0)) = v(l)$$

Application :

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{\sin 4x}{3x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\pi x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

π ACADEMY

$u(x) = \cos(x)$ B_E S_{SMART}

$u(x) = \pi \frac{\sin(4x)}{3x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} v \circ u(x) = v(l) = v\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Preuve :

On a : $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$ donc u admet un prolongement par continuité $\bar{u}$ définie comme :

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = u(x) ; \text{ si } x \neq x_0 \\ \bar{u}(x_0) = l \end{cases}$$

La fonction $\bar{u}$ étant continue en x_0 ; et v est continue en $l = \bar{u}(x_0)$ alors et d'après le théorème de la composition $(v \circ \bar{u})$ est continue en x_0 et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ \bar{u})(x) = (v \circ \bar{u})(x_0) = v(\bar{u}(x_0)) = v(l)$$

Application :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{\sin 4x}{3x}\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\pi x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$

Handwritten notes and calculations:

For problem 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{\sin 4x}{3x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

For problem 2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\pi x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right) = \sin(\pi) = 0$

Additional notes: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x$, $x = \frac{1}{x^2}$

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE**1) Image d'un segment (intervalle fermé) :**

Activité :

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\pi x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$$

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Activité :

Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$

1- Déterminer graphiquement les images des intervalles

$$I_1 = [0, 1], I_2 = [-3, -1]; I_3 = [-3, 1]$$

2- Montrer algébriquement que $f([-3, 1]) = [-1, 3]$

Rappelle :

$$f(I_2) = f([-3, -1]) = [-1, 3]$$

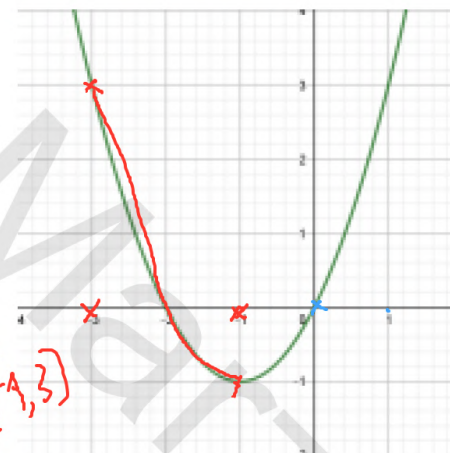
$$f(I_3) = [-1, 3]$$

$$f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} f(I) \subset J \\ J \subset f(I) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y) \end{cases}$$

Théorème : (Admis)

L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où :



IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

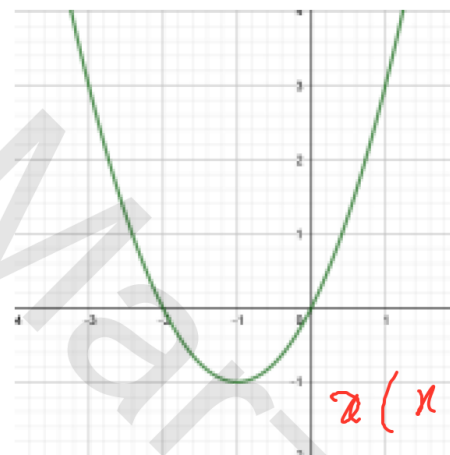
Activité :

Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$

1- Déterminer graphiquement les images des intervalles

$$I_1 = [0, 1], I_2 = [-3, -1]; I_3 = [-3, 1]$$

2- Montrer algébriquement que $f([-3, 1]) = [-1, 3]$



Rappel :

$$\forall x \in [-3, 1] \Rightarrow f(x) \in [-1, 3]$$

$$f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} f(I) \subset J \\ J \subset f(I) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y) \end{cases}$$

Théorème : (Admis)

L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où :

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$x(x+2)$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq x+2 \leq 3$$

$$\begin{matrix} 3 & 3 \\ -1 & -9 \end{matrix}$$

$$-9 \leq x(x+2) \leq 3$$

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Activité :

Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$

1- Déterminer graphiquement les images des intervalles

$$I_1 = [0, 1], I_2 = [-3, -1]; I_3 = [-3, 1]$$

2- Montrer algébriquement que $f([-3, 1]) = [-1, 3]$

Rappel :

$$\forall y \in [-1, 3], \exists x \in I \quad f(x) = y$$

$$y \in [-1, 3] \quad \text{cherchons } f(x) = y$$

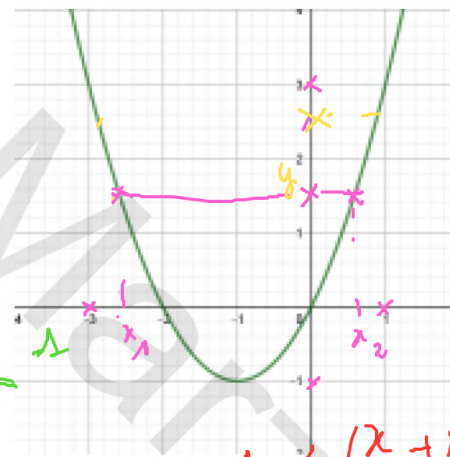
$$\text{càd } x^2 + 2x = y$$

$$(x+1)^2 = y+1 \geq 0$$
$$x+1 = \pm \sqrt{y+1} \Rightarrow$$

$$f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} f(I) \subset J \\ J \subset f(I) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y) \end{cases}$$

$$x = \pm \sqrt{y+1} - 1$$



$$-1 \leq (x+1)^2 - 1$$

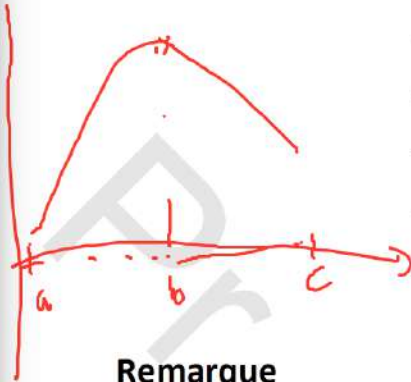
$$-3 \leq x \leq -1$$

$$-2 \leq x+1 < 0$$

$$0 \leq (x+1)^2 \leq 4$$

$$-1 \leq f(x) \leq 3$$

L'intervalle I	$f(I) : f$ strictement croissante	$f(I) : f$ strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$



Remarque

Si f n'est pas strictement monotone sur l'intervalle I , on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle I en intervalles où f est strictement monotone et on utilise la propriété $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$.

PNG

PDF (Default)

Exercice :

1- Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

2- Déterminer les images des intervalles suivants : $] -1, 0]$; $[1, 2]$; $[-1, 2[$; $[0, +\infty[$

$$f(I_1 \cap I_2) \subseteq f(I_1) \cap f(I_2)$$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

1) Le théorème :

Intervalle I	$f(x)$ strictement croissante	$f(x)$ strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Talking:



You are screen sharing

Stop share

Remarque

Si f n'est pas strictement monotone sur l'intervalle I , on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle I en intervalles où f est strictement monotone et on utilise la propriété $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$:

Exercice :

PNG

PDF (Default)

- Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x^2$

2- Déterminer les images des intervalles suivants : $] -1, 0]$; $[1, 2]$; $[-1, 2[$; $[0, +\infty[$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.**1) Le théorème :**

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6(x-1)x$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	+	+
$f(x)$	$+\infty$	1	0	-1	2	$+\infty$