

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que : $a < b$.

On sait que $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

On a donc $f(a) \in [m, M]$ et $f(b) \in [m, M]$.

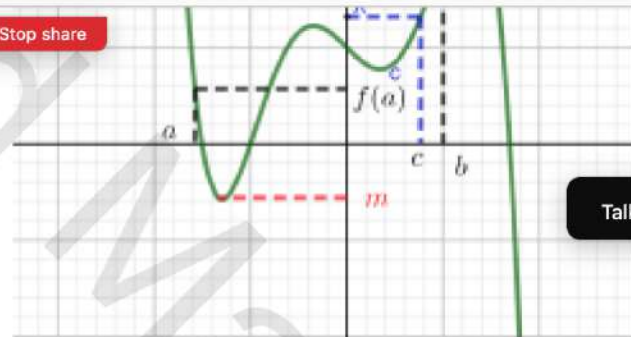
Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a donc : $\lambda \in [m, M]$ et puisque $f([a, b]) = [m, M]$ donc λ admet au moins un antécédent c dans l'intervalle $[a, b]$.

D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Théorème T.V.I :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$



Talking: BE SMART ACADEMY

π ACADEMY
BE SMART

Remarque :

L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$ " peut-être formulée comme :

" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$

Corolaire1 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$ *sur $]a, b[$*

Preuve :

$f(a) \times f(b) < 0$ veut dire que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

prend $\lambda = 0$ dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

Corolaire2 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

You are screen sharing

Stop share

Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Preuve :

$f(a) \times f(b) < 0$ veut dire que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

On prend $\lambda = 0$ dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

Corolaire2 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

2) Applications :

Exercice 1 :

1- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $[0, 1]$

2- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$

$$\exists! c = f(c) = 0$$

π ACADEMY
BE SMART

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

Activité :

montrons $f(x) = x^3 + x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f fonction polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

donc f est strictement croissante, de plus $f(0) \times f(2) = -1 \times 9 = -9 < 0$

donc $\exists ! c \in [0, 2]$, $f(c) = 0$, [f est strictement croissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow \exists ! c \in \mathbb{R} \quad f(c) = 0$]

2) Applications :

Exercice 1 :

- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

$f(2) \times f(0) = 9 \times -1 < 0$



VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

Activité :

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1- Montrer que pour tout y dans $I = [0, +\infty[$, l'équation $f(y) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle

PDF



Close

Corolaire2 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

2) Applications :Exercice 1 :

1- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $[0, 1]$

2- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.Activité :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Montrer que pour tout y dans $I = [0, +\infty[$, l'équation $f(y) = x$ admet une solution unique dans

l'intervalle $J =]0, 1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f admet une fonction réciproque de $J =]0, 1]$ vers $I = [0, +\infty[$

Remarque :

$$g(y) = f(y)$$

$$y \in \mathbb{R}^+$$

$$f(y) = \frac{1}{y^2+1} \in]0, 1], \exists ! x \in]0, 1]$$

$$f(y) = x$$

$$y^2+1 \geq 1 \Rightarrow f(y) \in]0, 1]$$

FORMAT

Cambria Math

11,04

T T T T T

OBJECTS

SCANNED DOCUMENTS

Settings

☐ Recognize text

☐ Show bounding boxes

☒ Restrict editing

PDF

Close

Corolaire2 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

2) Applications :Exercice 1 :

1- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $[0, 1]$

2- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.Activité :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Montrer que pour tout y dans $I = [0, +\infty[$, l'équation $f(y) = x$ admet une solution unique dans

l'intervalle $J =]0, 1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f admet une fonction réciproque de $J =]0, 1]$ vers $I = [0, +\infty[$

Remarque :

$$g(x) = x - f(x)$$

$$g(0) = -f(0) < 0$$

$$g(1) = 1 - f(1) > 0$$

FORMAT

Cambria Math

11,04

T T T T T

OBJECTS

SCANNED DOCUMENTS

Settings

Recognize text

Show bounding boxes

Restrict editing

On a donc (puisque f est strictement croissante) $f(y_1) > f(y_2)$ donc $f(y_1) \neq f(y_2)$ et finalement f est injective
donc f est une bijection de I vers $f(I)$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I et on a : $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

2.2 Application :

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x)$ pour x dans J

Exercice 2 :

la fonction $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$ et déterminer $g^{-1}(x)$ pour x dans J

$$f(1) = 1 \Rightarrow 2y^2 + y + 1 - x = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 8(1-x) = 8x - 7 > 1$$

11

$$-1 \pm \sqrt{8x-7}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{8x-7}}{4}$$

$\Rightarrow f^{-1}$ existe

f définit sur $f(I) = f([0,1])$
 $J = [1,4]$

$$f(0) = 1 \\ f^{-1}(1) = 0$$

$$[0,1] = I \leftarrow f(y) = 2$$

$$\Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

(chercher y)

$$x \in [1,4] = J$$

continue ($f \cdot p$), dérivable ($f \cdot p$) $f'(x) = 4x + 1 > 0 \ (\forall x \in [0,1])$

strictement croissante

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x)$ pour x dans J

Exercice 2 :

Soit la fonction $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$ et déterminer $g^{-1}(x)$ pour x dans J

$$1) \quad g'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \geq 0 \quad (\forall x \in [1, +\infty[)$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow g([1, +\infty[) = [g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$$

Limite et continuité

$$[-1, +\infty[$$

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

Exercice 3 :

Soit la fonction $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que h est une bijection de $] -1, 1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer $h^{-1}(x)$ pour x dans J .

2.3 Propriété de la fonction réciproque

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x)$ pour x dans J

Exercice 2 :

Soit la fonction $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$ et déterminer $g^{-1}(x)$ pour x dans J

$$\begin{aligned} g(4) &= 4 - 2\sqrt{4} = 0 \\ g^{-1}(0) &= 4 \\ \Rightarrow g^{-1}(x) &= (1 + \sqrt{x+1})^2 \end{aligned}$$

② $\nwarrow$ + g continue sur $[1, +\infty[\Rightarrow g$ admet une fonction réciproque de $J = g(I) = [-1, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.

Prof. Ingé Marzouki Ahmed

$$y \in I, x \in J = [-1, +\infty[\quad g(y) = x \quad \Rightarrow \quad y - 2\sqrt{y} = x \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y} - x = 0$$

$$\begin{aligned} x > -1 \\ g(1) &= -1 \\ 1 &= g^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$$\sqrt{y} = \frac{2 \pm 2\sqrt{x+1}}{2 \times 1} = 1 \pm 2\sqrt{x+1}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 + 4x = 4(1+x) \geq 0 \\ \Rightarrow y &= (1 \pm \sqrt{x+1})^2 \end{aligned}$$