

$$U_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2} = \frac{0}{0} \quad (FJ) \quad ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(xn) + \cos nx - \sum_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \cos(nx)}{n^2 x^2} n^2 + \frac{\cos(nx) \left(1 - \cos x \cos 2x \cdots \cos((n-1)x) \right)}{x^2} \right)$$

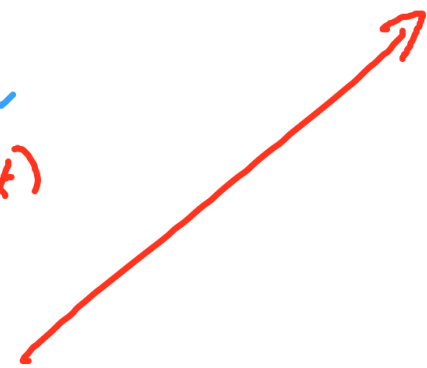
$$U_n = \frac{1}{2} n^2 + 1 \times U_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

$$U_n = U_{n-1} + \frac{1}{2} n^2$$

$$\forall n \geq 1, U_n = U_{n-1} + \frac{1}{2} n^2$$

$$\forall n \geq 1; U_n - U_{n-1} = \frac{1}{2} n^2$$

$$\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} U_1 - U_0 = \frac{1}{2} \times 1^2 \\ U_2 - U_1 = \frac{1}{2} \times 2^2 \\ U_3 - U_2 = \frac{1}{2} \times 3^2 \\ \vdots \\ U_n - U_{n-1} = \frac{1}{2} \times n^2 \end{array} \right.$$



Somme télescopique



$$+ U_k - U_{k-1}$$

par sommation des égalités
suivantes, après la simplifi-
cation, on aura

$$U_n - U_0 = \frac{1}{2} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

avec $U_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$U_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$u_k - u_{k-1} = \frac{1}{2} k^2$$

$$\forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^n u_k - u_{k-1} = \frac{1}{2} k^2$$

$$\sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n u_{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} k^2$$

$$\sum_{k=1}^n u_k - \sum_{l=0}^{n-1} u_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$u_n - u_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 = u_n$$

$$\begin{cases} k-1=l \\ k=1 \Rightarrow l=0 \\ k=n \Rightarrow l=n-1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + u_{2k+1} - u_{2k-1} \\ + u_{2k+1} - u_{2k+3} \end{array} \right.$$

$$u_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(0x)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-1}{n^2} = 0$$

$$U_n = \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}$$

$$U_n - U_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\cos x \cos 2x \cdots \cos((n-1)x) \cos(nx) + \cos x \cdots \cos((n-1)x)}{x^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos x \cos 2x \cdots \cos((n-1)x) [-\cos nx + 1]}{x^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\frac{1 - \cos(nx)}{n^2 x \cdot x^2}$$

$$n^2 =$$

$$\lim$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \approx \frac{1}{2} x^2$$

$$x = nx \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$$

$$(1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots$$

$$+ n = \frac{n(n+1)}{2} \dots$$



$$(n+1)^2 - n^2$$

$$(2) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$$

$$+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\leftarrow (n+1)^3 - n^3$$

$$(3) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots$$

$$+ n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

$$(4) \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 =$$

$$\frac{(n+1)^5 - n^5}{5}$$

$$\sum_{k=1}^n$$

Résultat

$\leftarrow (3) + (2) + (1)$

$$\leftarrow \sum_{k=1}^n$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} \quad \frac{(1 - \cos x \cos(2x) \times \cos(3x) \times \cos(4x) \times \dots \times \cos(nx))}{x^n}$$

$$2 \cos x \sin x = \sin(2x)$$

$$\frac{1 - \cos x \cos(2x) \cos(4x) - \dots - \cos(2^n x)}{x^n}$$

lim
x → 0

$$\lim_{x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \dots \cos(nx)}{x^2} = \frac{0}{0} \quad (FJ)$$

Hors programme

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+ \sin x \cos(2x) \dots \cos(nx) + 2 \cos x \sin 2x \cos 3x \dots \cos(nx)}{x \dots \dots \dots}$$

$$2x$$

$$= \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} \dots \dots \dots + \frac{n^2}{2} \\ = \frac{1}{2} (1 + 4 + 9 + \dots + n^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

1) Montrons par récurrence que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \dots \cos(nx)}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

$n=1$ (vrai).

Supposons que la relation est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \dots \cos(nx) \cos((n+1)x)}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(n+1)x + \cos(n+1)x - \cos n \cos(2x) - \dots - \cos(n+1)x}{x^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)^2 x^2} + \cos((n+1)x) \left(\frac{1 - \cos x - \dots - \cos nx}{x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)^2 +$$

HR

$$1 \times \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \right)$$

la relation est vraie pour $n+1$.

Mq

$$\left(\prod_{k=1}^n f_k(x) \right)' = \sum_{j=1}^n f_j'(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n f_k(x) \quad \swarrow$$

$$= f_1'(x) \times f_2(x) f_3(x) \dots \times f_n(x) + f_2'(x) f_1(x) f_3(x) \dots \times f_n(x)$$

$$\dots + f_1(x) f_2(x) \dots \times f_{n-1}(x) f_n'(x)$$

per $n=2$

$$(f_1(x) f_2(x))' = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x)$$

Supposons que la relation est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$

$$\begin{aligned}
 \left(\prod_{k=1}^{n+1} f_k(x) \right)' &= \left(\underbrace{(f_1 f_2 \times f_3 \times \dots \times f_n \times f_{n+1})}_{\downarrow} (x) \right)' \quad \downarrow \text{H.R.} \\
 &= \left((f_1 f_2) \times f_3 \times \dots \times f_n \times f_{n+1} \right)'(x) + (f_1 f_2) \times (f_3 \times \dots \times f_{n+1})'(x) \\
 &= (f_1' f_2 + f_1 f_2') f_3 \times \dots \times f_n \times f_{n+1}(x) + f_1 f_2 (f_3 \times \dots \times f_{n+1})'(x) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} f_j(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} f_k(x) \quad (\text{P}_{n+1} \text{ vraie})
 \end{aligned}$$