

2BAC SM

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(x) \cos(2x) \dots \cos(nx)}{x^2}$$

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{\cos(x) - x \cos'(x)}{x}$$

$$n=1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$$

$$n=2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \left(\frac{1 - \cos(2x)}{x^2} \right),$$

$$\frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2}$$

2/ $n=3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cos(3x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x) + \cos(3x) (1 - \cos(x) \cos(2x))}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} \right) + \cos(3x) \left(\frac{1 - \cos x \cos(2x)}{x^2} \right)$$

$$= 9 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 4$$

Montrons par récurrence que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) - \cos(3x)}{x^2}$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}} \frac{1 - \cos(x) (\cos(2x) - x \cos nx),}{x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{+ \sin x (\cos(2x) - x \cos nx) - x \cos(nx) + \frac{2 \cos(x) \sin(2x) x - x \cos(nx)}{2x}}{2x}$$

$$\dots + \frac{\cos x - \cos(2x)}{2x \times n} \quad (n^2 \sin(nx))$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2^2 + \dots + \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

Montrons par récurrence que

$$(P_n) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cos(kx)}{x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

pour $n=1$ la relation P_1 est vraie

Supposons que la relation est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \cos(kx)}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(n+1)x + \cos(n+1)x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cos(kx)}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(n+1)x + \cos(n+1)x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cos(kx)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)^2 x^2} \times (n+1)^2 + \cos((n+1)x) \left(1 - \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right)$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \right)$$

d'où la relation est vraie pour $n+1$,

En Bref $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \times \dots \times (1 - \sin^n(x))}{\cos^{2n}(x)}$$

$$n=1 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{-\cos x}{-\cos x \sin x} = \frac{1}{2}$$

regle de
l'Hôpital)
Thors programme
since math
SM

$$n=2 \quad \lim_x \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x} = 1 \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x \sin x}{-2 \cos x \sin x} = 1 \times 1$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) (1 - \sin^2 x) (1 - \sin^3 x)}{\cos^6 x}$$

$$\frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \times \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$1 \times 1 \times \frac{-3 \sin^2 x \cos x}{-2 \cos x \sin x} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{2}$$

$$1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2}$$

(Q_n) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\prod_{k=1}^n \frac{(1 - \sin^k(x))}{\cos^2(x)} = \frac{n!}{2^n}$ 8

→ n=1 vraie évident (dégager)

→ Supposons que (Q_n) vraie - montrons que (Q_{n+1}) est vraie

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{1 - \sin^k(x)}{\cos^2(x)} = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \sin^k(x)}{\cos^2(x)} \times \frac{1 - \sin^{n+1}(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{n!}{2^n} \times \frac{(n+1)}{2}$$

$$y = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x \rightarrow \pi/2 \Leftrightarrow y \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^{(n+1)}(x)}{\cos^2 x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^{(n+1)}(y + \pi/2)}{\cos^2(y + \pi/2)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^{(n+1)}(y)}{\sin^2 y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{\sin^2 y} \times \frac{1 - \cos^{(n+1)}(y)}{y^2}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 - \sin^{(n+1)}(x)}{\cos^2 x} \right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \\ & \frac{- (n+1) \sin^n x \cos x}{-2 \cos x \sin x} \quad \text{RL} \\ & = \frac{1}{2} x^{n+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2}$$

$$\left(\sum_{k=0}^n \cos(y) \right)$$

10

$$= \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = \frac{n+1}{2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^{n+1}(y)}{y^2}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^n (\cos^k(x) - \cos^{k+1}(x))}{y^2}$$

(somme télescopique)

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \left(\cos^k(x) \frac{1 - \cos(x)}{y^2} \right) = \sum_{k=0}^n 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (n+1)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(y)}{y^2} = P_n \quad n=0 \Rightarrow 0 \quad \underline{P_0 = 0 = \frac{0}{2}}$$

$$n=1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} =$$

$$\frac{n=2}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(y)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} = 1^2 = 1 = \frac{2}{2}}$$

Supposons que la relation est vraie pour n et démontrons la pour $n+1$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^{n+1}(y)}{y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y + \cos y + \cos y \cos^n(y)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(y)}{y^2} + \cos y \left(\frac{1 - \cos^n(y)}{y^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

donc la relation est vraie pour $n+1$

En résumé $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1 - \sin^k(a)}{\cos a} \right) = \frac{n+1}{2}$$