

$$\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x \rightarrow 0 = 0$$

$$3 \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4} + 2 \left( \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} + \operatorname{Arctan} x \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2 \times \frac{\pi}{2}$$

$$3 \operatorname{Arctan} x = \frac{5\pi}{4}$$

$$\operatorname{Arctan} x = \frac{5\pi}{12} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$x = \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right), S = \left\{ \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right\}$$

### EXERCICE 55

Résoudre les équations suivantes :

$$\operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{8} ; \quad \operatorname{Arc tan}(x^2 + 2) = \operatorname{Arctan}(3)$$

$$\operatorname{Arctan}(x^2 - x) = \frac{3\pi}{4} ; \quad \operatorname{Arc tan} x = \frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{Arctan} x$$

$$\operatorname{Arc tan} x + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{3} ; \quad \operatorname{Arc tan} \sqrt{x} = -\frac{\pi}{4}$$

### EXERCICE 56

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(3x)}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x^2 + 4x)}{x}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(x^4 - x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{Arc tan} x - \frac{\pi}{2} x ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + \frac{\pi}{2}}{x-1}$$

$$\text{Arctan}(\sqrt{x}) = \frac{-\pi}{4}$$

$$\text{Arctan } x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

domaine de définition de l'équation

$$x \geq 0$$

$$\frac{-\pi}{4} = \text{Arctan } \sqrt{x} \geq 0 \text{ impossible } S = \emptyset$$

$$\tan(\text{Arctan } \sqrt{x}) = \tan \frac{-\pi}{4} = -1$$

$$\sqrt{x} = -1 \text{ impossible}$$

$$S = \emptyset$$

PNG

PDF (Default)

96,7%

Talking:

### EXERCICE 55

Résoudre les équations suivantes :

$$\text{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{8} \quad ; \quad \text{Arc tan}(x^2 + 2) = \text{Arctan}(3)$$

$$\text{Arctan}(x^2 - x) = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad \text{Arc tan } x = \frac{\pi}{4} + 2\text{Arctan}$$

$$\text{Arc tan } x + \text{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \text{Arc tan } \sqrt{x} = -\frac{\pi}{4}$$

### EXERCICE 56

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(3x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x^2 + 4x)}{x}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x^4 - x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \text{Arctan} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{Arc tan } x - \frac{\pi}{2} x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + \frac{\pi}{2}}{x-1}$$

HomeTools

el-moufid-en-mat... x

el-1-l-analyse-1\_compress.pdf

Talking: BE SMART ACADEMY

SaveStarSharePrintCommentFullscreenDownload

56

Navigation toolbar

PNG

PDF (Default)

LA FONCTION ARCTANGENTE

EXERCICE 53

Simplifier les expressions suivantes :

$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{41\pi}{17}\right)\right)$

$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{79\pi}{3}\right)\right)$

$\operatorname{Arctan}\left(\tan 5\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{3}\right)\right)$

$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)}\right)$

$\tan\left(\operatorname{Arctan}(2016)\right)$

$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}-\operatorname{Arctan}\frac{3}{7}\right)$

$\tan\left(-\operatorname{Arctan}(5)\right)$

$\tan\left(2\operatorname{Arctan}(3)\right)$

$-\pi/3$

$\times \frac{\pi}{3} - 2\pi$

$= -\pi/3$

EXERCICE 56

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(3x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x^2 + 4x)}{x}$

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(x^4 - x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2} x$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + \frac{\pi}{2}}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2\sqrt{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{4}} - 1}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x-1}}{x-1}$

Scanné avec CamScanner



## EXERCICE 53

$$\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{41\pi}{17}\right)\right) \quad ; \quad \text{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{79\pi}{3}\right)\right)$$

$$\text{Arctan}(\tan 5(\text{Arctan} \sqrt{3})) : \text{Arctan} \left( \frac{1}{\tan \left( \frac{3\pi}{11} \right)} \right)$$

$$\tan(\text{Arctan}(2016)) \quad ; \quad \tan\left(\text{Arctan}\frac{2}{3} - \text{Arctan}\frac{3}{7}\right)$$

$$\tan(-\text{Arctan}(5)) \quad ; \quad \tan(2\text{Arctan}(3))$$

PDF (Default)

$\text{Arc tan } x = \frac{\pi}{4} + 2\text{Arc tan } \dots$   
 $\text{Arc tan } x + \text{Arc tan } (2x) = \frac{\pi}{3} ; \text{Arc tan } \sqrt{x} = -\frac{\pi}{4}$

## EXERCICE 56

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(3x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x^2 + 4x)}{x}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(x^2 - x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2} x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +1} \frac{\operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{1-x^2} \right) + \frac{\pi}{2}}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2\sqrt{\text{Arc tan } x - \frac{\pi}{4}} - 1}{x - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{Arctan} \sqrt{x-1}}{x-1}$$

HomeTools

el-moufid-en-mat... x

SaveStarSharePrintCommentFullscreenDownload

56

PointerEraseTextLassoHighlightEraser

UndoRedo

Close

LA FONCTION ARCTANGENTE

EXERCICE 53

Simplifier les expressions suivantes :

$$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{41\pi}{17}\right)\right) ; \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{79\pi}{3}\right)\right)$$
$$\operatorname{Arctan}\left(\tan 5\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{3}\right)\right) ; \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)}\right)$$
$$\tan\left(\operatorname{Arctan}(2016)\right) ; \tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}-\operatorname{Arctan}\frac{3}{7}\right)$$
$$\tan\left(-\operatorname{Arctan}(5)\right) ; \tan\left(2\operatorname{Arctan}(3)\right)$$

PNGPDF (Default)

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{3} ; \operatorname{Arctan} \sqrt{x} = -\frac{\pi}{4}$$

EXERCICE 56

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(3x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x^2 + 4x)}{x}$$
$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(x^4 - x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2} x ; \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + \frac{\pi}{2}}{x-1}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2\sqrt{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{4}} - 1}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$2\sqrt{x-1} = y$$
$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{y^2}{y^2+1}}{y^2}$$

Scanné avec CamScanner

**EXERCICE 57**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.  
Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1}$   $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \times \cos 2x \times \dots \times \cos nx}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$

Handwritten notes on the left:

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\frac{n(n+1)}{2}$
- $\frac{n}{-2n}$

**EXERCICE 58**

Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x^2}}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\cos x - \sqrt{1+\sin x}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

**EXERCICE 59**

Soit  $f_m$  la fonction définie par :

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right) - \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + mx + m + \frac{2m+1}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \text{ et } x \neq -1 \end{cases}$$

Où  $m$  est un paramètre réel.

- 1) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f_m(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} f_m(x)$
- 2) Déterminer  $m$  pour que  $f_m$  soit continue en 0.
- 3) Déterminer  $m$  pour que  $f_m$  soit prolongeable par continuité en -1.

**EXERCICE 60**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sqrt{x - E(x)} - x$

- 1) Déterminer  $D$ , le domaine de définition de  $f$ .

# EXERCICE 57

Soit  $n$  un entier naturel non nul.  
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2n}} \frac{\sqrt{1 + \cos nx}}{4n^2 x^2 - \pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \times \cos 2x \times \dots \times \cos nx}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$$

# EXERCICE 58

Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x^2}}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\cos x - \sqrt{1+\sin x}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{f(n) - f(1)}{n - 1} \times \frac{n - 1}{g(n) - g(1)}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x^k$$

$$g(x) = (2-x)^n$$

et puis on a  $f$  et  $g$  sont des fonctions polynomiales dérivable sur  $\mathbb{R}$  alors

$$f'(1) \times \frac{1}{g'(1)}$$

$$(1 + 2 + \dots + n) \times$$

$$\frac{1}{n(2-x)^{n-1}(-1)} \Big|_{n=2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}$$

**EXERCICE 57**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.  
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2n}} \frac{\sqrt{1 + \cos nx}}{4n^2 x^2 - \pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \times \cos 2x \times \dots \times \cos nx}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$$

**EXERCICE 58**

Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x^2}}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\cos x - \sqrt{1+\sin x}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n (x^k - 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(1-x) \left( \sum_{k=0}^{n-1} (2-x)^k \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sum_{k=1}^n ((x-2) \sum_{j=0}^{k-1} x^j)}{(1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (2-x)^k} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} (x-2) x^j}{(1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (2-x)^k} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} 1}{\sum_{k=0}^{n-1} (2-x)^k} \quad \left( \frac{x-2}{1-x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} 1}{\sum_{k=0}^{n-1} (2-x)^k} = - \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=0}^{n-1} 1} = - \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = - \frac{(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

### EXERCICE 57

Soit  $n$  un entier naturel non nul.  
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n}{(2-x)^n}$$

$$= n! \times \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{2^n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \times \cos 2x \times \dots \times \cos nx}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$$

### EXERCICE 58

Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x^2}}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\cos x - \sqrt{1+\sin x}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos y)(1 - \cos^2 y) \dots (1 - \cos^n y)}{\sin^{2n} y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^n (1 - \cos^k y)}{\sin^{2n} y}$$

$$\prod_{k=1}^n \sin^2 y$$

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \left( \frac{1 - \cos^k(y)}{y^2 \sin^2 y} \right) \times y^2$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \left( \frac{(1 - \cos y)}{y^2} \sum_{j=0}^{k-1} \cos^j(y) \right)$$

$$= \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{k-1} 1 \right) \right) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{k}{2} \right)$$

$f(x) \cap (b) =$

$f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$

$x f(x) = \dots$   
 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

### EXERCICE 69

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2} \right)$$

- 1) Déterminer  $D$  le domaine de définition de  $f$ .
- 2) Justifier la continuité de la fonction  $f$  sur  $D$ .
- 3) Montrer qu'il existe un couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\left( \forall x \in \left[ \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right] \right) 2\alpha \leq \sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2} \leq 2\beta$$

- 4) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0;1]$  sur  $[0;1]$
- 5) Soit  $[a,b]$  un segment inclus dans  $[0;1]$ .

Montrer que :  $(\exists c \in [a,b]) f(c) = \frac{a-c}{a-2b+c}$

### EXERCICE 74

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[0;1]$  telles

que :  $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$

- 1) Montrer qu'il existe  $c \in [0;1]$  tel que  $f(c) = g(c)$ .
- 2) On suppose dans cette question que :

$$f(0) = g(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = g(0) = 1$$

Montrer que :

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}^+) (\exists \alpha \in [0;1]) f(\alpha) = \lambda g(\alpha)$$

### EXERCICE 75

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$  et  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe un réel  $c \in [a,b]$  tel que :

4) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0;1]$  sur  $[0;1]$

5) Soit  $[a,b]$  un segment inclus dans  $[0;1]$ .

Montrer que :  $(\exists c \in [a,b]) f(c) = \frac{a-c}{a-2b+c}$

### EXERCICE 70

Soit  $f$  une fonction définie de  $[0;1]$  dans  $[0;1]$  et continue sur  $[0;1]$ .

$$g(x) = f(x) + f(1-x) - 2x$$

Établir que :  $(\exists c \in [0;1]) f(c) + f(1-c) = 2c$

### EXERCICE 71

$$g(x) = f(x) + f(1-x) - 2x$$

Soit  $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$  une fonction continue sur  $[a,b]$ .

Montrer que  $f$  admet un point invariant.

### EXERCICE 72

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0;1]$  telle que :

$$f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$$

### EXERCICE 75

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$  et  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe un réel  $c \in [a,b]$  tel que :

$$pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$$

### EXERCICE 76

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$(\exists a \in \mathbb{R}) f \circ f(a) = a$$

Montrer que :  $(\exists c \in \mathbb{R}) f(c) = c$

### EXERCICE 77

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Montrer que  $f$  garde un signe constant sur  $I$ .

### EXERCICE 78

- 4) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0;1]$  sur  $[0;1]$
- 5) Soit  $[a,b]$  un segment inclus dans  $[0;1]$ .

Montrer que :  $(\exists c \in [a,b]) f(c) = \frac{a-c}{a-2b+c}$

EXERCICE 70

Soit  $f$  une fonction définie de  $[0;1]$  dans  $[0;1]$  et continue sur  $[0;1]$ .

Établir que :  $(\exists c \in [0;1]) f(c) + f(1-c) = 2c$

EXERCICE 71

$g(x) = f(a) - a$   
 $g(b) = b - a$

Soit  $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$  une fonction continue sur  $[a,b]$ .  
Montrer que  $f$  admet un point invariant.

EXERCICE 72

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0;1]$  telle que :

$f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$

EXERCICE 75

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$  et  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe un réel  $c \in [a,b]$  tel que :

$pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$

EXERCICE 76

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$(\exists a \in \mathbb{R}) f \circ f(a) = a$

Montrer que :  $(\exists c \in \mathbb{R}) f(c) = c$

EXERCICE 77

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Montrer que  $f$  garde un signe constant sur  $I$ .

EXERCICE 78



5) Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $[0; 1]$ .  
Montrer que :  $(\exists c \in [a, b]) f(c) = \frac{a}{a - 2b + c}$

### EXERCICE 70

Soit  $f$  une fonction définie de  $[0; 1]$  dans  $[0; 1]$  et continue sur  $[0; 1]$ .

Établir que :  $(\exists c \in [0; 1]) f(c) + f(1 - c) = 2c$

### EXERCICE 71

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue sur  $[a, b]$ .  
Montrer que  $f$  admet un point invariant.

### EXERCICE 72

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  telle que :  
 $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$

### EXERCICE 75

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe un réel  $c \in [a, b]$  tel que :

$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$$

### EXERCICE 76

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$(\exists a \in \mathbb{R}) f \circ f(a) = a$$

Montrer que :  $(\exists c \in \mathbb{R}) f(c) = c$

### EXERCICE 77

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Montrer que  $f$  garde un signe constant sur  $I$ .

### EXERCICE 78

$[a, f(a)], [f(a), a]$   
 $[\min(a, f(a)), \max(a, f(a))]$

$$g(x) = f(x) - x$$

$$g(a) = f(a) - a$$

$$g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) = a - f(a)$$

$$g(f(a)) \times g(a) = (a - f(a)) \times (f(a) - a) \leq 0$$